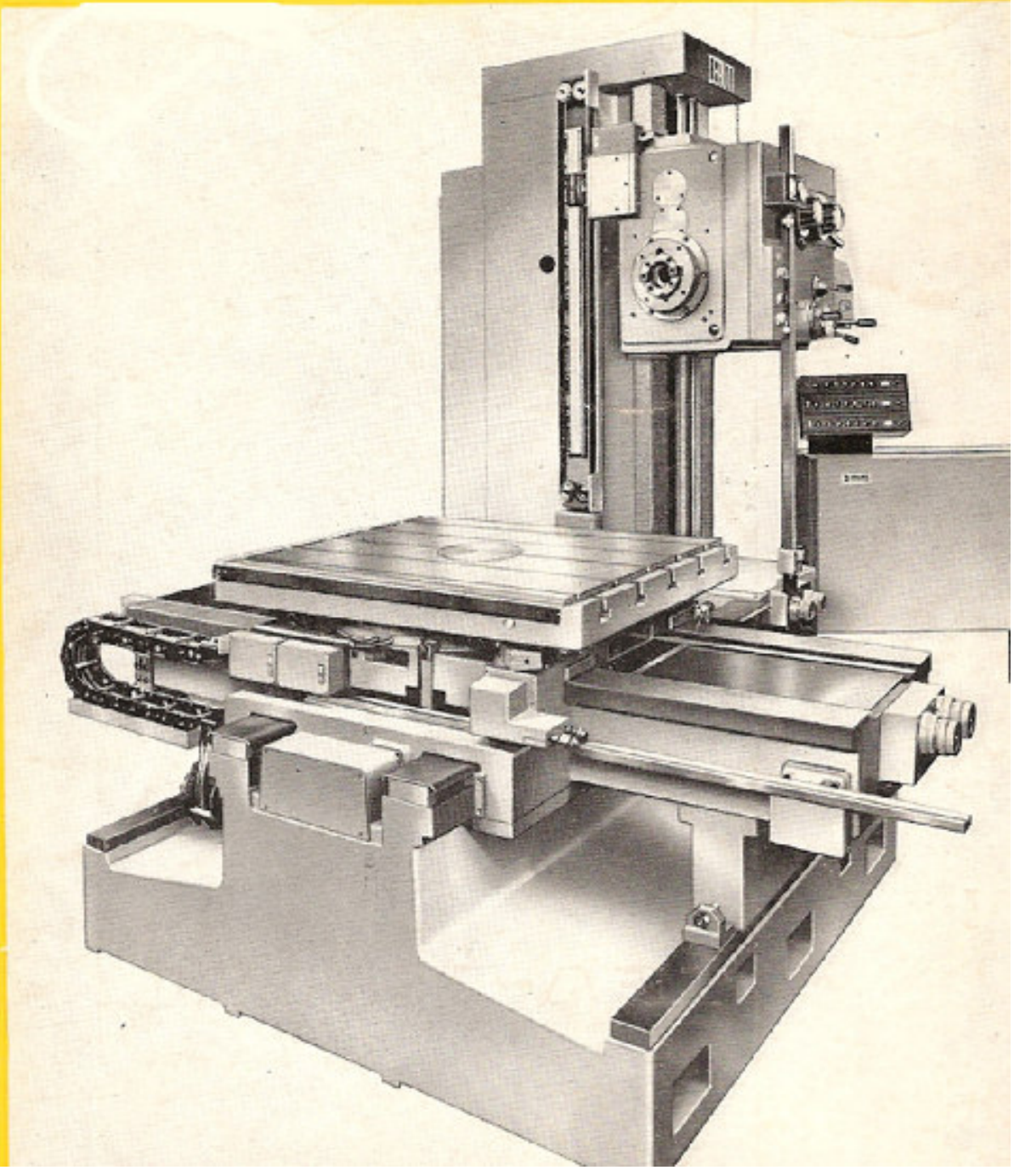
360

9 SETTEMBRE 1965 - 250 LIRE
milano - via tantoni, 14 - tel. 450.355/641 - 403.43.53

rivista di meccanica



CERUTI
Officine Meccaniche S.p.A.
BOLLATE (MI)

Alesatrice orizzontale di precisione, AB 75 equipaggiata con visualizzatore elettronico di quota

Il treno di Einstein

p. i. Piero BORIA

1. PREMESSA

In meccanica classica si ammette, per qualunque sistema mobile, il principio della relatività dei movimenti (principio di Galileo). Così, ad esempio, la velocità rispetto alla terra di un passeggero che cammina su di un treno in movimento, per Galileo, è data dalla somma vettoriale delle due velocità. Secondo lo stesso principio si dovrebbe ammettere che un raggio di luce emesso dalla coda del treno verso la locomotiva ha una velocità, relativa alla terra, data dalla somma tra la velocità della luce e la velocità del treno.

Abbiamo detto « si dovrebbe » perché in realtà la scoperta del fisico americano Albert Michelson (1852-1931) costrinse i fisici a rivedere e perfezionare certe teorie, giungendo al punto di dichiarare valide per approssimazione certe formule galileiane solo per velocità sensibilmente inferiori a quella della luce.

2. L'ESPERIMENTO DI MICHELSON (E MORLEY)

Le scoperte degli scienziati, grandi o piccole, molto spesso provocano una rivoluzione, grande o piccola, nelle teorie scientifiche. La scienza quale oggi a noi si presenta, patrimonio immenso di cui tutti godiamo, è in effetti la risultante di una serie ininterrotta ed ininterrompibile di osservazioni, studi, scoperte.

Una delle scoperte di conseguenze più rivoluzionarie venne effettuata quasi sul finire del secolo scorso dal Michelson. Questi, nel 1881 in collaborazione con Morley, per mezzo di un ingegnoso strumento dimostrò sperimentalmente che la velocità della luce è costante per qualunque osservatore, sia questi in moto od in quiete. In conseguenza di questa scoperta possiamo affermare che la velocità del raggio di luce che parte dalla coda del treno e va verso la locomotiva è la stessa sia per un osservatore sul treno in movimento, sia per un osservatore a terra; cioè è una velocità assoluta, indipendente dal sistema di riferimento. Questo concetto sembra contrario al buonsenso comune. In realtà bisogna pensare (come osservano argutamente Landau e Rumer) che solo pochi secoli fa, nel Medio Evo, era contrario al buonsenso comune dire che la terra è rotonda. In realtà la fisica moderna anziché chiudere gli occhi (alla moda antica) sulle nuove scoperte, riformulò i principi su cui fino allora si era basata (senza rinnegarli) e li perfezionò col lavoro di insigni scienziati quali Maxwell, Poincarè, Lorentz, e, grande tra i grandi, Albert Einstein.

3. LA CONTRAZIONE DEL TEMPO

Dato l'enorme valore della velocità della luce il suo carattere assoluto provoca effetti inaspettati, misurabili solo quando le dimensioni dei sistemi in osservazione (lunghezze, altezze, velocità ecc.) sono enormi. Per questo Einstein propone alla nostra osservazione un sistema in movimento costituito da un

treno di caratteristiche astronomiche: lunghezza 5.400.000 km; velocità 240.000 km/s.

Nella prima enunciazione della sua teoria della relatività (relatività ristretta) l'Einstein ammette due postulati:

1) nessuna esperienza di qualsiasi natura, eseguita nell'interno di un corpo, può rivelare il moto di traslazione rettilinea uniforme del corpo stesso;

2) la velocità della luce nel vuoto è costante (300.000 km/s), indipendente dal moto della sorgente e dell'osservatore, ed è la massima; cioè non può essere superata da nessun altro sistema.

Ammesso ciò bisogna concludere che la velocità della luce rappresenta una velocità limite per qualunque sistema capace di muoversi. Il fatto che le caratteristiche del treno siano così lontane dalla nostra attuale realtà, ci porta a sottolineare l'impossibilità di verificare correntemente gli « strani » fenomeni che su di esso, ed anche all'infuori di esso, dovremmo osservare.

Ammettiamo, dunque, che dal pavimento di un vagone occupato da un passeggero parta verticalmente un raggio di luce diretto al soffitto. Se da qui il raggio viene riflesso da uno specchio ancora verso il pavimento, per il passeggero il percorso compiuto dal raggio è uguale a due volte l'altezza del vagone, cioè $2\,AB' = 2\,BD$ (figura 1).

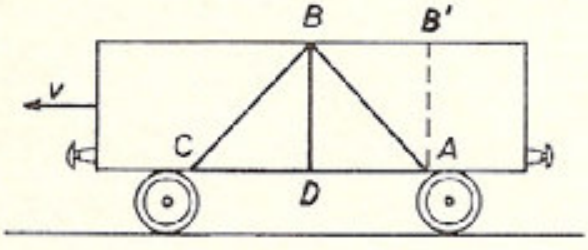


Fig. 1

Per un cantoniere fermo a terra, il percorso del raggio sarà, invece, dato dai lati AB e BC del triangolo isoscele ABC. Il lato AC rappresenta, evidentemente, lo spazio percorso, nel frattempo, dal treno, come osservabile da terra.

Per il teorema di Pitagora, possiamo scrivere:

$$BD = \sqrt{(AB)^2 - (AD)^2} \qquad (1)$$

Se BD è l'altezza del vagone, sarà:

$$2\,BD = c\,t' \qquad (2)$$

avendo indicato con c la velocità della luce e con t' il tempo che il raggio impiega per arrivare allo specchio e tornare al punto di partenza, secondo il passeggero.

Indicando con t il tempo che passa per il cantoniere fermo, avremo:

$$AB + BC = 2\,AB = c\,t \qquad (3)$$

$$AC = 2\,AD = v\,t \qquad (4)$$

dove v rappresenta la velocità del sistema treno.

Sostituendo la (3) e la (4) nella (1), otterremo:

$$BD = \sqrt{c^2 t^2 - v^2 t^2} = t\,\sqrt{c^2 - v^2} \qquad (5)$$

e, da questa in sistema con la (2):

$$c\,t' = t\,\sqrt{c^2 - v^2} \qquad (6)$$

Dividendo ambo i membri per c, otteniamo una importante formula:

$$t' = t\,\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (7)$$

Tale formula ci dà la relazione esistente tra il tempo t' che passa dentro un sistema che si muove con la velocità v, ed il tempo t che passa per un osservatore fermo. Il termine $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (e che per il nostro treno è $= 0{,}6$) rappresenta il « fattore di contrazione lorentziana »; fattore che compare nelle formule definite dal fisico matematico olandese H. A. Lorentz (1853-1928), nel tentativo (contemporaneo ed indipendente da quello del Fitzgerald) di spiegare il risultato inaspettato dell'esperimento di Michelson-Morley.

Possiamo osservare, dalla (7), che esistono teoricamente tre casi particolari:

1) se il viaggiatore si muove con velocità zero il fattore lorentziano è uguale a uno, per cui $t' = t$;

2) se il viaggiatore si muove con la velocità della luce il fattore di contrazione è zero, per cui $t' = 0$; il che significa che per chi viaggia alla velocità della luce il tempo non passa mai! Quindi un ipotetico astronauta trentenne, viaggiante nel co-

smo a 300.000 km/s, tra qualche nostro millennio sarebbe ancora trentenne. Uno spirito faceto potrebbe anche osservare che il vero elisir di lunga vita è proprio e soltanto la velocità della luce!

3) ammettendo l'ipotesi che il viaggiatore possa muoversi con velocità superiore a quella della luce, il fattore di contrazione sarebbe un numero immaginario. A tale ipotesi dovrebbe corrispondere il « viaggio nel passato », argomento caro alla fantasia di molti romanzieri che si sbizzarriscono ad inventare le « macchine del tempo ».

Dalla stessa formula si deduce che per i bassi valori di v oggi realizzabili, la differenza tra t' e t è impercettibile per gli umani viaggiatori (ricordiamo che la velocità orbitale dei nostri astronauti è dell'ordine di 8 km/s soltanto).

Se attribuiamo al vagone la rispettabile altezza di 900.000 km, con facili considerazioni e dalla (7) otteniamo: $t' = 6$ s; $t = 10$ s. Ciò vuol dire che, mentre per l'orologio del cantoniere passano dieci secondi, per l'orologio dell'uomo in moto a 240.000 km/s, sono trascorsi solo 6 secondi.

4. LA CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

Il fatto che il tempo sia da considerare come una grandezza non assoluta, ma relativa (cioè dipendente dal sistema di riferimento), ci porta subito a dimostrare come una stessa lunghezza, vista da due sistemi di riferimento in moto relativo, sia diversa. Si noti bene che non c'entrano le illusioni ottiche.

Ammettiamo che ai lati della nostra ferrovia si trovino due pali telegrafici distanti tra loro 2.400.000 km. Data la velocità del treno (240.000 km/s), l'osservatore fermo vedrà il mobile coprire la distanza esistente tra i pali in 10 secondi.

Ma, come abbiamo visto, mentre per il cantoniere passano 10 secondi, per il passeggero ne passano solo 6: ciò vuol dire che per questi, mentre il treno va dal primo al secondo palo (ricordiamo che $v = 240.000$ km/s), il treno ha coperto una distanza di $6 \times 240.000 = 1.440.000$ km. Ergo, per chi viaggia i pali distano tra loro 1.440.000 km, anziché 2.400.000 km come per chi sta fermo. È chiaro che il viaggiatore costituisce un sistema di riferimento ed il cantoniere un altro.

In formule il prodotto $t\,v$ rappresenta lo spazio l coperto dal treno secondo l'osservatore fermo; mentre $t'\,v$ rappresenta lo spazio l' coperto per il viaggiatore sul treno. Introducendo la formula di Lorentz (7), possiamo scrivere:

$$t'\,v = t\,v\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (8)$$

ed anche:

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (9)$$

Applicando la (9) all'esempio di cui sopra, otteniamo lo stesso risultato, cioè $l' = 1.440.000$ km. Se ne conclude che le dimensioni dei corpi che si muovono si contraggono nel senso del loro movimento. Nel nostro caso i due pali si muovono rispetto al passeggero e perciò, per costui, la loro distanza è minore. Se ci riferiamo ai pali (cioè se fissiamo il nostro sistema di riferimento nei pali) possiamo applicare la (9) chiamando con l la distanza tra i pali stessi. Si può ottenere così la lunghezza contratta del treno visto dall'osservatore fermo l' (si tratta, in definitiva, di applicare il principio di reciprocità).

5. CONTEMPORANEITA' DI DUE AVVENIMENTI

Albert Einstein (1879 ÷ 1955), a soli 26 anni diede, con la prima teoria della relatività (o relatività ristretta, 1905) un significato chiaro e completo alla teoria delle contrazioni del Lorentz. Tant'è vero che la via più piana per comprendere le « strane » relazioni spazio-tempo (dato il carattere assoluto della velocità della luce) è l'osservazione di quel che succede nel ed intorno al treno di Einstein.

Uno dei risultati più apparentemente assurdi (oltre ai già esaminati) della relatività del tempo è deducibile dall'esempio seguente, che dimostra come due avvenimenti contemporanei sul treno, e quindi per il passeggero, non lo sono più per un osservatore fermo.

Ammettiamo, dunque, che una lampada collocata esattamente nel mezzo del treno comandi, emettendo due rag-

gi, il funzionamento di due meccanismi a fotocellula, disposti l'uno in coda e l'altro in testa, capaci di far aprire ad ognuno, contemporaneamente all'arrivo del raggio di luce, la propria porta. Fissando il nostro sistema di riferimento nel treno (immaginiamoci, cioè, sul treno), possiamo osservare che quando si accenda la lampada le porte di coda e di testa si aprono contemporaneamente dopo 2.700.000/300.000 = 11,3 secondi circa (ricordiamo che la velocità della luce è 300.000 km/s e la lunghezza del treno 5.400.000 km).

Prendendo, invece, un sistema di riferimento fisso a terra, vedremo il raggio diretto alla coda raggiungere questa prima che l'altro raggiunga la testa. Infatti ambedue i raggi hanno, come detto, velocità di 300.000 km/s, ma, mentre la coda va incontro al raggio, la testa fugge da esso. Per causa della contrazione delle lunghezze, il treno per l'osservatore fermo sarà lungo 5.400.000 × 0,6 = 3.240.000 km (essendo 0,6 il fattore di contrazione).

Quindi un raggio raggiungerà la coda nel tempo misurato da:

$$\frac{1.620.000}{300.000 + 240.000} = 3 \text{ secondi}$$

l'altro raggiungerà la testa nel tempo:

$$\frac{1.620.000}{300.000 - 240.000} = 27 \text{ secondi.}$$

Dunque, per l'osservatore fisso le porte si aprono con una differenza di tempo di 27 — 3 = 24 secondi (prima la posteriore e poi l'anteriore), mentre per l'altro osservatore si aprono contemporaneamente!

6. TRASFORMAZIONE DI COORDINATE

Consideriamo due sistemi di coordinate cartesiane, inizialmente coincidenti, dotati di un moto relativo rettilineo uniforme. Se il movimento consiste in uno spostamento parallelo all'asse delle x, per un punto di coordinate x, y, z, di un sistema, le coordinate y', z', dello stesso punto rispetto all'altro sistema restano costanti. Cioè sarà:

$$y' = y \qquad (10)$$

$$z' = z \qquad (11)$$

Supposto (per semplicità . . . formale) il primo sistema fisso, data la velocità v di traslazione del secondo (positiva per indicare un verso concorde col verso positivo delle x), in ogni istante l'ascissa x' di un suo punto in meccanica classica resterebbe definita dalla relazione (fig. 2):

$$x' = x - v\,t \qquad (12)$$

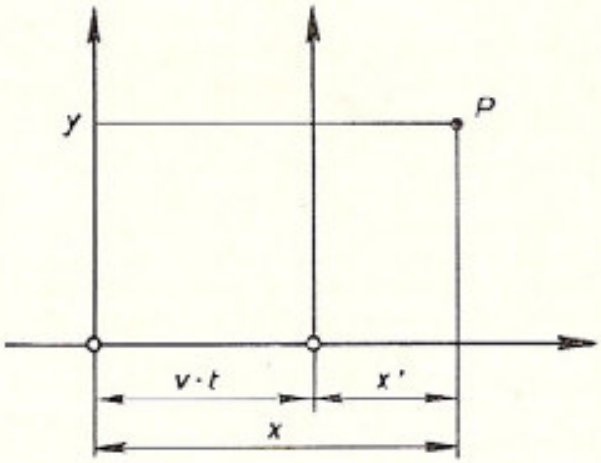


Fig. 2

dove t rappresenta il tempo passato dall'istante zero (coincidenza delle coordinate, per cui $x' = x$) all'istante di osservazione.

Secondo la meccanica relativistica la (12) non è vera, e, per velocità non sufficientemente inferiori a quella della luce, anche inammissibile. Infatti il prodotto $v\,t$ rappresenta lo spazio percorso ($v\,t = x - x'$) dal sistema mobile, che è soggetto alla contrazione delle lunghezze. Cosicché, per soddisfare alla relatività, bisogna scrivere (fig. 3):

$$x - x' = \frac{v\,t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (13)$$

da cui:

$$x' = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (14)$$

Abbiamo visto che i classici concetti sono insufficienti a definire il tempo in cui si verifica un fenomeno visto da un qualsivoglia sistema di riferimento. Difatti non solo lo spazio, ma anche il tempo debbono essere definiti caso per caso relativamente al sistema di riferimento scelto. Continuando nella considerazione dei nostri due sistemi, supponiamo che, all'istante t, succeda qualcosa nel punto di coordinate x, y, z, (supponiamo, per esempio, che vi si accenda una lampada). Secondo la meccanica classica il fenomeno dovrebbe venire registrato contemporaneamente nei due sistemi, per cui:

$$t' = t \qquad (15)$$

essendo t' il tempo trascorso per il sistema mobile. Però, secondo la relatività, il concetto di contemporaneità, intesa classicamente, non esiste. Infatti, come nel paragrafo precedente abbiamo visto, bisogna tener conto della contrazione del tempo e dello spazio.

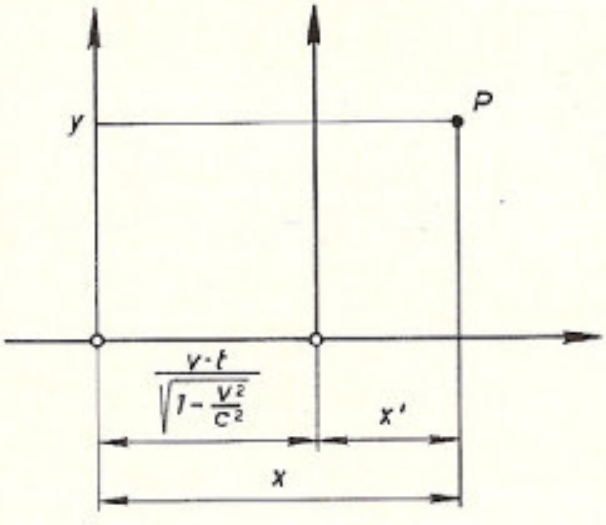


Fig. 3

Dalla fig. 3 possiamo dedurre che, affinché il fenomeno accaduto in P sia registrato alla distanza x', deve trascorrere un tempo misurato da:

$$t' = \frac{x'}{c} \qquad (16)$$

mentre lo stesso fenomeno sarà registrabile, alla distanza x, dopo il tempo

$$t = \frac{x}{c} \qquad (17)$$

Sostituendo nella (16) l'espressione di x' ottenuta nella (14) e quella di t ottenuta nella (17), con facili passaggi si ottiene:

$$t' = \frac{t - \frac{v\,x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (18)$$

Osserviamo che il rapporto v/c ha i seguenti limiti di variazione: $0 \leqslant v/c \leqslant 1$. Quando è molto basso esso è trascurabile cosicché sono accettabili le formule classiche (12) e (15). Le formule esatte, ripetiamo, non ammettendo la contemporaneità assoluta, fanno del tempo una specie di quarta coordinata variabile, indispensabile per definire un fenomeno. Tale « coordinata » è definibile per mezzo della (18) (quindi le quattro coordinate sarebbero x, y, z, t).

Riportiamo, per concludere questo paragrafo, tutte assieme le formule di trasformazione di Lorentz:

$$x' = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (14)$$

$$y' = y \qquad (10)$$

$$z' = z \qquad (11)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v\,x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (18)$$

7. LA MASSA

Il secondo principio della dinamica, $F = m\,a$, ci dice che la massa m di un corpo è il fattore di proporzionalità che lega tra loro la forza F e l'accelerazione a. La meccanica classica ammette il principio di conservazione della massa: il termine m, pertanto, rappresenterebbe un dato costante per ciascun corpo, indipendente dallo stato di moto o quiete dello stesso.

Se, però, ammettiamo che un corpo possa essere accelerato solo fin che ha

raggiunto la velocità della luce, vuol dire che, raggiunta questa, l'accelerazione diventa zero. Cioè per v che tende a c, si deve avere a che tende a zero (simbolicamente: per $v \to c$ sarà $a \to 0$). Questo, evidentemente, per qualunque valore della forza F. Esplicitando la massa, il secondo principio della dinamica ci dà:

$$m = \frac{F}{a} \qquad (19)$$

dalla quale si può dedurre che

$$\lim_{a \to 0} m = \lim_{v \to c} m = \infty \qquad (20)$$

Alla luce della relatività, dunque, la massa cessa di essere una grandezza conservativa, e diviene una funzione della velocità. Ora sappiamo che pure le lunghezze ed i tempi sono funzione della velocità di traslazione del sistema di riferimento. Nelle equazioni di Lorentz abbiamo visto l'importante funzione del fattore di contrazione che permette di correlazionare le grandezze riferite a due sistemi di riferimento in movimento relativo. Introducendo lo stesso fattore per porre in relazione le masse, soddisferemo le condizioni imposte dalla (20) con la seguente espressione:

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (21)$$

avendo indicato, al solito, con m la massa rispetto al sistema per cui $v=0$; e con m' la massa dotata di velocità v.

Nel caso del treno di Einstein, essendo $\sqrt{1 - v^2/c^2} = 6/10$, sarà $m' = 10/6\ m$. Bisogna sottolineare che normalmente gli incrementi di massa sfuggono anche alla indagine più severa. Tuttavia, negli acceleratori di cui oggi la scienza dispone, è stato possibile comparare la massa iniziale e finale di un elettrone accelerato fino ad una velocità prossima a quella della luce ottenendo una brillante conferma del fatto che la massa è legata alla velocità come vuole la meccanica relativistica.

8. MASSA ED ENERGIA

Se per variare di una certa entità la velocità del corpo di massa m è necessario applicare la forza F, moltiplicando questa per lo spostamento (nella propria direzione) otteniamo il lavoro compiuto. Tale lavoro, siccome induce una variazione di velocità, induce pure, per quanto or ora detto, una variazione di massa. Questo vuol dire che esiste una relazione tra il lavoro (o l'energia) e la massa. Einstein fornì la relazione che permette di valutare numericamente la relazione tra energia e massa e viceversa. Secondo la sua teoria, inoltre, l'energia pesa ed offre una inerzia al moto in modo completamente analogo alla materia. Secondo Einstein, dunque, fornendo ad un corpo l'energia E, questo si muove come se la sua massa fosse aumentata della quantità E/c^2. Perciò possiamo scrivere che

$$m = \frac{E}{c^2} \qquad (22)$$

ed anche:

$$E = m\,c^2 \qquad (23)$$

Nel sistema C.G.S. saranno espressi E in erg, m in grammi-massa e sarà $c = 3 \times 10^{10}$ cm/s. Ricordando, poi, che la massa è una grandezza variabile, possiamo introdurre il coefficiente di Lorentz, d'accordo con la (21), per cui:

$$E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (24)$$

dalla quale si vede che l'energia di un corpo tende all'infinito quando la sua velocità tende a c (cioè $E \to \infty$, quando $v \to c$).

La (24) si identifica con la (23) quando $v = 0$.

Dimostrando che non vi è sostanziale differenza tra massa ed energia, Einstein rivoluzionò principi ritenuti incrollabili come quello della conservazione della massa. I calcoli di Planck, per esempio, dimostrano che quando 2 grammi di idrogeno si combinano con 16 grammi di ossigeno per dar luogo ad acqua, si ha una diminuzione di 3×10^{-9} grammi di materia.

Il principio è stato brillantemente

confermato nelle ricerche sulla disintegrazione dei corpi radioattivi e sulla trasmutazione degli elementi. Le variazioni di massa risultano accompagnate da variazioni di energia in maniera corrispondente alle equazioni di Einstein.

9. CONCLUSIONE

Abbiamo visto, abbastanza dettagliatamente, i principi della cinematica relativistica, confrontandoli con quelli della cinematica classica. Sulla dinamica molto resta da dire. Però, dato il carattere di queste modeste note, intese a fornire al lettore un'idea abbastanza approssimata dei principi della relatività ristretta, ci sembra di avere detto l'indispensabile.

Dopo la teoria della relatività ristretta Einstein pubblicò, nel 1916, la famosa memoria sulla relatività generalizzata, estendendo le nuove teorie ai campi gravitazionali ed ai campi magnetici. Tale lavoro aprì nuovi orizzonti, diede nuovi ed efficaci mezzi agli studiosi (per esempio agli astronomi) per comprendere le cause, fino ad allora non determinate soddisfacentemente, di vari fenomeni celesti. I critici affermano concordemente che sarebbe bastato solo una piccola parte del lavoro di Einstein, per porlo nel novero dei geni dell'umanità.