



Un principio di conservazione relativistico: l'invariante ds^2

Nel saggio “Termodinamica & vita” abbiamo sottolineato come la Scienza (quella con la esse maiuscola) abbia, tra i propri obiettivi, la ricerca delle grandezze che rimangono inalterate dopo una trasformazione.

A chi ama le spiegazioni semplici dedichiamo queste rapidissime note, redatte da un vil meccanico, intese a mostrare qualcosa che rimane invariato in una trasformazione relativistica.

Ricordiamo che la teoria della relatività prese l'abbrivio dal risultato negativo dell'esperimento di Michelson e Morley (1887) e, per darne un'interpretazione, ci si misero i più bravi fisici del tempo (in primis l'olandese Heindrich Lorentz). Tuttavia solo Einstein ebbe il fegato di spiegarlo, nel 1906, postulando la costanza della velocità della luce rispetto a qualunque osservatore costringendo i fisici ad abbandonare definitivamente la necessità di riempire tutto l'universo di quello stranissimo fluido chiamato etere eliminando il concetto di *sistema di riferimento assoluto* e rendendo vane tutte le vexatae questiones intorno al moto dei corpi celesti: è il sole che si muove, no è la terra, forse è la luna etc. etc.

Vogliamo rispondere alla seguente domanda: qual'è la grandezza invariante tipica della prima relatività? A tale scopo consideriamo due osservatori, il primo dei quali sia solidale con un dato sistema di riferimento a propria volta solidale con la terra (quel che normalmente si classifica come “fermo”), l'altro sia solidale ad un sistema di riferimento in moto rispetto al primo (per esempio su di un treno). Se la velocità della luce è costante per qualunque osservatore cosa dobbiamo dedurre dalla *Figura 1* che riproduce l'essenza del “treno di Einstein”?

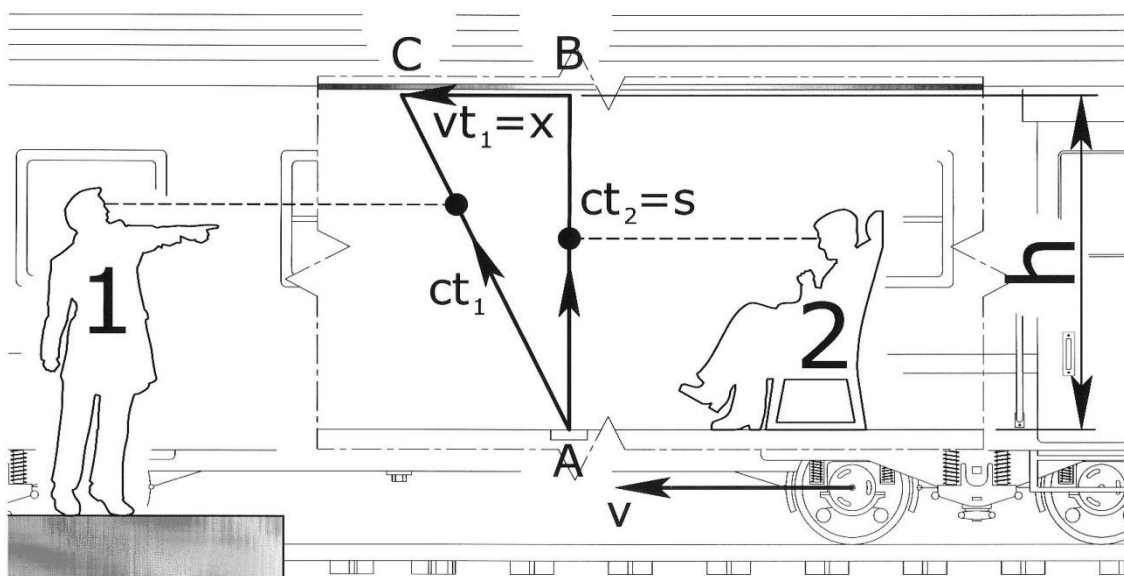


Figura 1 – Il raggio di luce a velocità c per i due osservatori



\overline{AB} rappresenta un raggio di luce che, partendo da A raggiunge il soffitto in B come lo vede l'osservatore 2. \overline{AC} è la traiettoria del raggio medesimo come vista dall'osservatore 1.

Si nota subito che, nel triangolo rettangolo ABC , rappresentando ct_1 l'ipotenusa e ct_2 un cateto ed essendo v (velocità del treno) e c (velocità della luce) costanti, *poiché* $ct_1 > ct_2$ *deve essere* $t_1 > t_2$!¹

La relazione intercedente tra i due tempi si ricava applicando in maniera banale il Teorema di Pitagora (non occorre di più):

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2, \quad \text{ovvero} \quad c^2 t_1^2 = c^2 t_2^2 + v^2 t_1^2,$$

e da qui si ricava una celebre formula contenente il "coefficiente di contrazione" (adimensionale) di Lorentz (indicato classicamente con γ):

$$t_1 = \frac{t_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_2}{\gamma}.$$

Se $0 < v < c$ si ha che $\gamma > 1$ per cui, entro questi limiti, come già detto sopra, è $t_1 > t_2$ sempre (per l'osservatore 1 il tempo "passa più in fretta").

Quando si fanno esempi numerici è bene assumere velocità (e spazi) paragonabili alla velocità della luce e che diano un coefficiente di contrazione razionale: per esempio $v = 240.000 \text{ km/sec}$, con questa assunzione il fattore di contrazione assume il valore $\gamma = 0,6$ per cui il tempo del viaggiatore in moto risulta rallentato del 40%.

Ciò significa che, non solo il suo orologio, ma anche tutto il suo sistema biologico assume un altro ritmo: il cuore invece di fare pum, pum, pum farà pum..., pum..., pum... (efficace osservazione del vecchio e caro amico Joao Roberto de Azevedo; vedasi anche il *Paradosso dei Gemelli*).

A questo punto è altrettanto facile comprendere la contrazione delle lunghezze: il viaggiatore 2, sul treno, che osserva due pali ai bordi della ferrovia, ne deduce la distanza controllando col proprio orologio il tempo t_2 che separa i due pali stessi, sapendo che la propria velocità è v dirà che la loro distanza è $D_2 = vt_2$ dove t_2 , *tempo proprio*, è minore (perché il tempo proprio è rallentato), rispetto a t_1 , di un fattore pari al coefficiente di dilatazione γ :

$$D_1 = D_2 \gamma,$$

¹ Generalmente i punti di incidenza dei raggi di luce B e C sono presentati come giacenti su di uno specchio posizionato sotto il soffitto del vagone. Tuttavia riteniamo che il fenomeno della riflessione serva solo a complicare l'esposizione: infatti, come dovrebbe dimostrare la nostra esposizione, è inessenziale.

E' come dire che è sufficiente solo confrontare, con attenzione, il cateto $\overline{AB} = ct_2$ e l'ipotenusa $\overline{AC} = ct_1$ per dedurre la dilatazione del tempo! Ovvero la dilatazione di t_1 rispetto a t_2 dal momento che... $c=c$...

dove con D_2 abbiamo indicato la *lunghezza propria* intercorrente tra i due pali (cioè misurata in un sistema di riferimento solidale con i pali). Si può concludere che l'osservatore vede le lunghezze, del sistema di riferimento in moto, contrarsi *nella direzione del moto*.

Reciprocamente l'analoga osservazione fatta dall'osservatore I circa la lunghezza del treno in moto avente *lunghezza propria* L_0 (cioè misurata a bordo del treno), porterà alla conclusione che L_R (*lunghezza relativistica*) è

$$L_R = L_0 \gamma .$$

Per convincerci di ciò supponiamo che il treno abbia una lunghezza propria di 300.000 km . Per ciascuno dei due osservatori un raggio di luce impiegherà un secondo per raggiungere, dall'una, l'altra estremità del treno. Poiché il tempo, per l'osservatore in moto, è dilatato di un fattore γ , la sua misurazione di lunghezza differirà per lo stesso fattore: chi è in moto, applicando la formula $s_2=ct_2$, troverà una lunghezza maggiore (il raggio, viaggiante a velocità c *identicamente uguale per entrambe gli osservatori*, dispone di un tempo dilatato per compiere il "medesimo" percorso). Chi è fermo misurerà una lunghezza $s_1=ct_1$, ma il proprio tempo t_1 è contratto di un fattore γ , per cui il raggio raggiungerà prima la seconda estremità risultando più corto del medesimo fattore. La *Figura 2* illustra quanto detto.

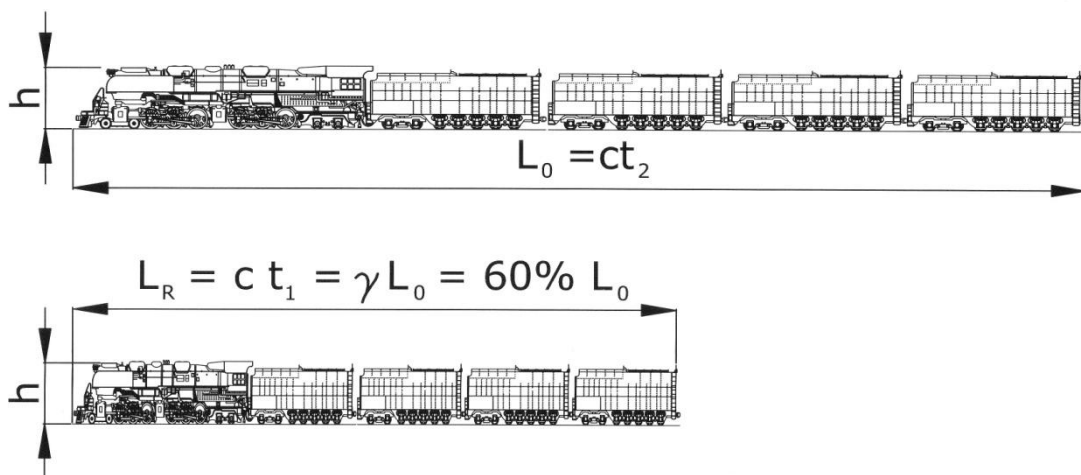


Figura 2 – La contrazione delle lunghezze per $\gamma= 0,6$

Man mano che il treno frena per fermarsi, esso treno si allungherà (come una fisarmonica) in modo che la propria lunghezza, una volta fermo, diventerà $L_0=L_R$ (allora per il passeggero si sarà fermata la ferrovia!).

A questo punto siamo in grado di dire cosa non varia in questa trasformazione: guardiamo attentamente entrambe le figure. Poniamo che, sia il



passaggero 2 che l'osservatore 1, si prendano la briga di misurare l'altezza del vagone che abbiamo indicato con h . E' chiaro che entrambe misureranno lo stesso valore! Ecco l'invariante: *le lunghezze ortogonali al moto*.

Applicando le notazioni consuete, con s indichiamo lo spazio invariante (corrispondente all'altezza del convoglio), con x lo spazio percorso dal sistema di riferimento in moto e con t il tempo proprio dell'osservatore. Osservando la *Figura 1*, l'invariante s si può scrivere:

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2,$$

facilmente verificabile perché se si dilata il tempo si contrae la lunghezza e viceversa.

In un moto nello spazio tridimensionale, ovviamente, assume la seguente forma:

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad .$$

In uno spazio n -dimensionale etc. etc.

A questo punto è d'uopo generalizzare per il caso che la velocità v vari nel tempo (come dire nel caso che sia $v=v(t)$); dobbiamo ...cogliere l'attimo e scrivere la medesima equazione che valga istante per istante (quel che si dice in forma puntuale):

$$\boxed{ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \quad ,$$

che è la forma canonica di ciò che si conserva in una trasformazione relativistica.