# INTORNO ALL'EQUAZIONE DI SCHROEDINGER

## 1. PRODROMI

Dal secolo XVIII, grazie al lavoro di Newton, era opinione comune che la luce avesse una natura corpuscolare senonché ulteriori osservazioni sui fenomeni di interferenza e diffrazione che si potevano realizzare con fasci di luce, in condizioni adeguate, ne implicavano anche una natura ondulatoria.
Tale doppia natura fu resa ben evidente da Thomas Young nei primi anni del 1800 con l'esperimento delle "due fenditure" capace di mostrare sia il comportamento ondulatorio che quello corpuscolare del medesimo fascio.
L'esperimento di Young è ancora oggi ritenuto uno dei più belli nella storia della Fisica per la sua semplicità, per la sua interpretazione e per le sue conseguenze, tanto che l'amato Maestro Richard Feynman dichiarò che tale esperimento era la chiave per comprendere il fondamento della Meccanica Quantistica.
È molto curioso che le due fenditure fossero ottenute con una strumentazione assai semplice: una carta da gioco incisa con una lametta!
Tale esperimento si trova molto ben descritto ed illustrato, con efficaci animazioni, nel web.
Più tardi Einstein osservando l'effetto fotoelettrico (1905) mise in evidenza il comportamento corpuscolare, consacrando quello che in seguito venne chiamato il "dualismo onda/corpuscolo".
L'intenzione di queste umili annotazioni è di mostrare ai probabili (e ignari) venticinque lettori l'origine (e quindi il significato) dell'equazione di Schroedinger che rappresenta il primo scoglio per lo studente di Fisica Teorica (almeno, a chi scrive, così andarono le cose, in illo tempore!).
Dapprincipio una visione abbastanza soddisfacente del dualismo onda/corpuscolo è stata proposta immaginando che l'aspetto ondulatorio fosse assimilabile a dei "treni d'onda" ed ogni treno rappresentasse un "quanto" di energia elettromagnetica (fotone) in accordo con l'idea di Planck secondo cui il quanto $\varepsilon$ possiede un'energia $h\nu$, dove $h$ è, appunto, la costante di Planck e $\nu$ la frequenza dell'onda.
A questo punto nasce l'esigenza di "equazionare" il dualismo al fine di risolvere le problematiche di una nuova Meccanica aggettivata, ovviamente, Quantistica.
Come vedremo, tale meccanica applicata alle particelle prevede stati energetici discreti: in contrapposizione alla Meccanica Classica che, applicata a corpi di "grandi" dimensioni, prevede invece stati energetici variabili con continuità.
Non è facile immaginare il lavoro dei fisici teorici intorno agli anni 1930: fondamentale, a questo proposito, la tesi di dottorato di Louis De Broglie (1924) che gli meritò un bel premio Nobel nel 1929.

## 2. DE BROGLIE, L'EQUAZIONE DELLE ONDE DI D'ALEMBERT E L'EQUAZIONE DI SCHROEDINGER

Ricordiamo che la pulsazione $\omega$ e la velocità di propagazione $c$ di un'onda elettromagnetica soddisfano le equazioni

$$\omega = 2\pi\nu; \; c = \lambda\nu \; ;$$

mentre secondo la visione classica, la quantità di moto $p$ di una particella di massa $m$ e velocità $c$ è data da $p = mc^2/c = mc$ (essendo sempre valida la famosa equazione einsteiniana $E = mc^2$) quindi ad ogni quanto di Planck, di energia $\varepsilon$, compete una q.d.m. $m \cdot c$ data da

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h}{\lambda} \; ,$$

formula che, in maniera assai meno rozza di come qui si è fatto, fa parte dei risultati ottenuti da De Broglie e che ci porta facilmente all'equazione di Schroedinger.
A tal fine ricordiamo l'equazione delle onde di d'Alembert

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \; , \qquad 1)$$

in cui abbiamo indicato con $A$ l'ampiezza istantanea dell'onda.
L'equazione generica di un'onda sinusoidale (del tipo che caratterizza le onde elettromagnetiche) variabile nel tempo può essere scritta

$$A = A_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

Dove $A_0$ rappresenta l'ampiezza massima (uno dei due picchi) e da cui si può dedurre

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A_0 \omega \sin(\omega t + \varphi), \qquad \text{ed anche} \quad \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -A_0 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 A \, ,$$

risultato interessante anche perché ci ricorda che, quando l'accelerazione è funzione dell'elongazione $A$, siamo certi che il moto è armonico.
A questo punto la *1)* può essere così scritta:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2 A}{c^2} \, . \qquad 2)$$

Ricordando quanto detto sopra, facendo le opportune sostituzioni e semplificazioni, si può ottenere

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{4\pi^2}{h^2} p^2,$$

ed introducendo, come d'uso, $\hbar$ (acca tagliato = $h/2\pi$)

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{p^2}{\hbar^2} \; .$$

Se indichiamo con $H$ l'operatore hamiltoniano (somma dell'energia cinetica, $\frac{1}{2}mc^2$, e potenziale *V* della particella) con semplici passaggi la *2)* ci può fornire

$$p^2 = 2m(H - V),$$

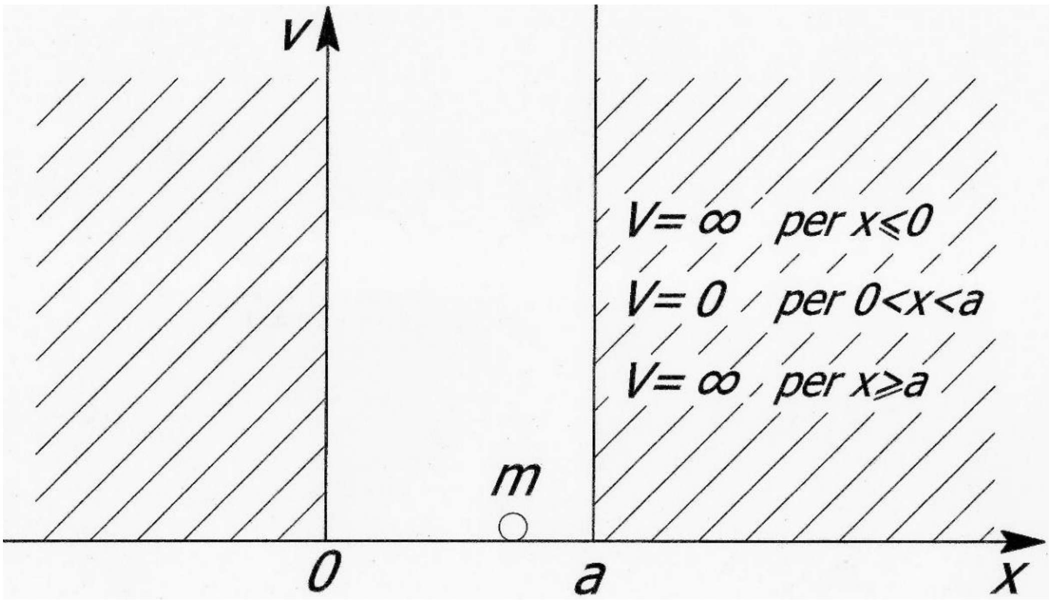
che, introducendo il concetto di "ampiezza di probabilità" $\Psi$ che la particella assuma determinate caratteristiche, come suggerì Schroedinger in luogo dell'ampiezza dell'onda, ricordando la *2)* ci permette di concludere

$$\boxed{\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(H - V)\Psi = 0\,,} \qquad 3)$$

che è la forma canonica dell'Equazione di Schroedinger. Speriamo di avere mostrato come il lavorio sull'equazione delle onde, complice il lavoro di De Broglie (scienziato nobile amante della solitudine nel proprio castello), abbia dato un significato all'equazione di Schroedinger che altrimenti sfugge, se si perde nel mare di considerazioni (udite per anni) che raggiungono brillantemente lo scopo di confondere le idee (!).
Ora è la volta della Teoria delle Stringhe che dovrebbe riuscire ad armonizzare la Teoria Generale della Relatività con la Meccanica Quantistica.
Ci stanno lavorando schiere di Fisici Teorici e pare proprio che siano sulla buona strada (grazie anche contributo dell'italiano Giovanni Veneziano)… e non è fuor di tema augurare loro il successo che la dedizione, con cui si impegnano, si merita!

## 3. UN'APPLICAZIONE MOLTO SEMPLICE MA CHE INSEGNA QUALCOSA

Ci proponiamo di sviluppare un'applicazione di MQ tipica delle esercitazioni di Fisica Teorica, in uno spazio monodimensionale.
Sia data una particella di massa *m* che si trova in una buca di potenziale *V* come rappresentato nella figura:



Ricordando che $\omega t = 2\,\pi x/\lambda$ , che il potenziale $V$ è nullo nell'intervallo *(0,a)* (estremi esclusi), verificando che $\lambda = h/\sqrt{2mH}$ , indicando con $A_0$ il valore massimo dell'ampiezza d'onda ed effettuando con la necessaria pazienza le derivazioni necessarie si può verificare che la seguente funzione goniometrica è soluzione della *3)*:

$$\Psi = A_0\, sen\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right).$$

Ne consegue che $\Psi(0) = A_0\, sen\,\varphi = 0,$ e, quindi, $\varphi = 0;$

mentre $\Psi(a) = A_0\, sen(2\pi a/\lambda) = 0$ e, quindi, $2\frac{\pi a}{\lambda} = n\pi$

da cui si può dedurre che è $\lambda = 2a/n,$ dove $n = 1,2,3,\ldots,$ implicherà delle posizioni discrete assumibili da $m$ e ad ogni ennesima posizione corrisponderà una ampiezza di probabilità che indicheremo con $\Psi_n$.

Poiché $\lambda = \frac{2a}{n}$ avremo

$$\Psi_n = A_0\, sen\left(\pi\frac{n}{a}x\right),$$

ora, però, è necessario imporre all'ampiezza $\Psi_n$ di non superare il valore unitario (corrispondente al 100% di probabilità e rappresenta il fatto che in qualche punto dell'intervallo *(0,a)* la probabilità di trovare la particella deve essere certa), effettuando quel che si chiama "normalizzazione" come indicato nella seguente operazione:

$$\int_0^a |\Psi_n|^2\ dx = 1\,.$$

Ricordando che $\int sen^2\, x\, dx = \frac{1}{2}(x - senx\, cosx) + c$ , possiamo scrivere

$$\int_0^a |\Psi_n|^2\ dx = A_0{}^2 \int_0^a sen^2\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\ dx = A_0^2\,\frac{a}{2} = 1\,,$$

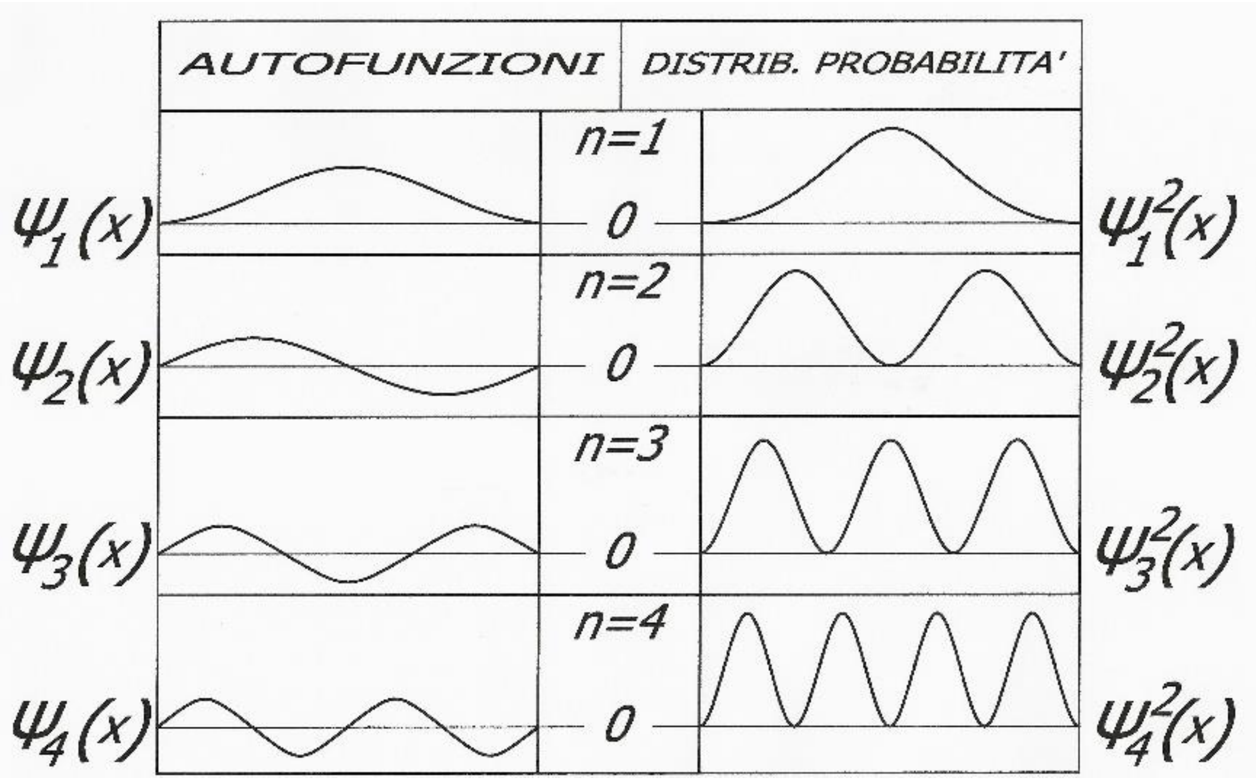
da cui possiamo dedurre che $A_0 = \sqrt{\frac{2}{a}}$ , ottenendo in seguito, ciò che in MQ si chiama autofunzione:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\, sen\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\ .$$

Abbiamo verificato in precedenza che la lunghezza d'onda è legata all'energia cinetica $H$ (essendo nulla l'energia potenziale $V$) dalla relazione $\lambda = h/\sqrt{2mH}$ ed anche che $\lambda = 2a/n$, per cui i livelli energetici possibili alla particella sono discreti in accordo con la seguente relazione:

$$H = \frac{h^2}{8a^2m} n^2 \, .$$

Alle autofunzioni, che essendo sinusoidali assumono anche valori negativi, si associa il loro quadrato ottenendo, così, la "distribuzione di probabilità" entrambe rappresentate nella figura seguente:




Come detto nel preambolo, questa presentazione ha lo scopo di illustrare, con linguaggio semplice e formalismo essenziale, come opera la Meccanica Quantistica, avendo anche mostrato una scolastica applicazione dell'Equazione di Schroedinger, oltre alla sua genesi, ad uso di chi se ne avvicina, per la prima volta, con la necessaria curiosità.

www.piermariaboria.it